第 1 章　质点的运动

一切物质都处于永恒的运动之中，运动的形式多种多样，例如机械运动、热运动、电磁运动等，其中机械运动是最基本的运动。完整地描述一个物体的运动就要描述物体各个点的运动，这对于运动过程中的某些物体来讲是非常困难的甚至是不可能的，例如奔跑中的人。在一些问题中，我们只关心物体整体的运动而不关心细微末节，这时可将物体看作一个点。本章主要引入位矢、速度和加速度等物理量，用数学的方法描述质点的运动。

1.1　质点　参考系　运动方程

一个物体相对于另一个物体的位置发生变动，或者一个物体的一部分相对于另一部分的位置发生变动，叫做**机械运动**，在力学中简称运动。机械运动是世间最普遍的运动形式。

1.1.1　质点　物理模型

真实的运动过程往往是非常复杂的，为了使问题简化，常常突出与问题密切相关的因素，忽略与问题联系不太紧密的因素，抽象出可供数学描述的物理模型。例如，如果物体的线度比运动的空间范围小得多，或物体平动时，物体上各部分的运动相差无几或完全相同，可忽略物体的大小和形状，而将其抽象成具有质量的几何点，叫做**质点**。

一个物体能否抽象成质点完全由研究的问题而定。例如在马拉松比赛中，人可以抽象成质点，因为我们只关心人从起点到终点的运动时间，至于他在比赛过程中的姿态我们是不关注的，而在跳水运动中人就不能抽象成质点，因为他的空中姿态直接影响比赛成绩。

在本章所研究的问题中，物体一般都可抽象为质点。

其实在以往处理物理问题时，用到了许多的物理模型，例如忽略滑轮的质量和轮轴摩擦的滑轮抽象为理想滑轮；忽略质量和伸缩的绳子抽象为轻质细绳；此外在以后的章节中我们还会遇到刚体、谐振子、理想弹性介质等物理模型。

1.1.2　参考系和坐标系

自然界中，大到日月星辰，小到分子原子，无一不在不停地运动，运动是一切物质的存在形式和属性，此为**运动的绝对性**。

但是要描述一个物体的运动，首先必须选择其他的物体作为对照，然后才能研究这个物体的运动。被选为对照物的物体叫**参考系**。在研究地上的物体运动时，常常选择地面为参考系。在本书中，若不特别指明时，则以地面为参照系。选择不同参考系，对同一物体运动的描述可能不同，此为**运动的相对性**。例如坐在相对地面运动的火车上的人相对于车厢是静止的，而相对地面却是运动的。

在参考系中只能定性地描述物体的运动，要想定量地描述物体的运动，就必须在参考系上建立适当的坐标系，使位置与一组数据相对应。常用的坐标系有直角坐标系、极坐标系、球面坐标系、柱面坐标系和自然坐标系。

选择何种坐标系并不影响对物体运动的客观描述，但却影响描述运动的数学方程的复杂程度。因此选择的坐标系应使描述运动的数学方程越简单越好。例如描述圆周运动时采用极坐标系就比采用直角坐标系好。

1.1.3　空间和时间

四方上下曰宇，古往今来曰宙，宇宙就是指空间和时间。空间是物质弥布的形式，反映了物质的广延性；时间是物质运动持续的形式，所反映的是物理事件的顺序性和持续性。脱离物质而言及时空没有任何意义。

在经典物理学中，空间是无限大的，时间是一个从过去到未来的无限的单向流逝过程，认为它们与物质的运动无关。现代物理学表明，时空与物质密切相关。时间常常用 t 表示，国际单位名称是秒，符号为 s。

1.2　运动的描述

1.2.1　位置矢量

选择好坐标系后，就可以定量地描述质点的位置了。质点在空间的位置 P 可用从坐标原点 O 点指向 P 点的有向线段 $\boldsymbol{r}$ 表示，称之为**位置矢量**，简称位矢，如图 1-1。位矢 $\boldsymbol{r}$ 的模$|\boldsymbol{r}|=r$ 指 OP 间的距离，位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向从 O 指向 P，P 点的位置坐标 x、y、z 分别是位矢 $\boldsymbol{r}$ 在 Ox、Oy、Oz 轴上的投影，Ox、Oy、Oz 三轴正方向的单位矢量分别用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 表示，则位矢 $\boldsymbol{r}$ 在直角坐标系中的正交分解式可表示为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k} \tag{1-1}$$

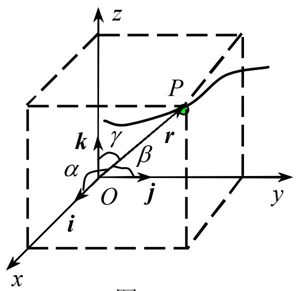


图 1-1

因而位矢 $\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2} \tag{1-2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向可用方向余弦表示

$$\cos\alpha=x/r,\quad \cos\beta=y/r,\quad \cos\gamma=z/r \tag{1-3}$$

它们有着如下关系，即

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

1.2.2　运动方程　轨道

在运动过程中，质点的位矢随时间不断变化，即位矢是时间的函数。位矢是时间的显函数的数学表达式叫质点的**运动方程**或**运动函数**，记作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t) \tag{1-4}$$

它反映了位置随时间的变化情况。运动方程也可表达为分量形式，即

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases} \tag{1-5}$$

运动方程的正交分解式可写作

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \tag{1-6}$$

（1-5）式实际上是质点运动轨道的一组参数方程，消去参数 t 便可得到**轨道方程**。

例 1.1　一质点在一平面上的直角坐标系 Oxy 中的运动方程为

$$\boldsymbol{r}=(3\cos t)\boldsymbol{i}+(4\sin t)\boldsymbol{j}$$

求质点的轨道方程。

解　由运动方程的正交分解式可得分量式

$$\begin{cases}x=3\cos t\\ y=4\sin t\end{cases}$$

消去时间参量 t，得到轨道方程

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$$

说明质点作椭圆运动。

1.2.3　位移

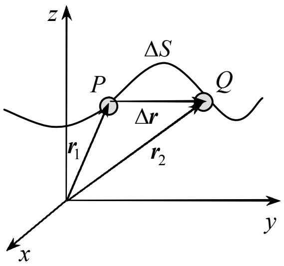


图 1-2

研究质点的运动，不仅要知道每时每刻质点的位置，还要知道质点在一定时间段里的位置变动情况。如图 1-2 所示，经过Δt 的时间，质点从 P 点运动到 Q 点，其位置变动可用有向线段 $\overrightarrow{PQ}$ 表示。它表明了质点位置移动的距离和方位，称之为**位移**。由图 1-2 可以看出

$$\overrightarrow{PQ}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta\boldsymbol{r} \tag{1-7}$$

即**位移等于位矢的增量**。

由于

$$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}\ ,$$
$$\boldsymbol{r}_2=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\boldsymbol{i}+y(t+\Delta t)\boldsymbol{j}+z(t+\Delta t)\boldsymbol{k}$$

所以位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k} \tag{1-8}$$

式中 $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)$， $\Delta y=y(t+\Delta t)-y(t)$， $\Delta z=z(t+\Delta t)-z(t)$

因此位移的大小

$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2} \tag{1-9}$$

Δs 为质点从 P 点运动到 Q 点经历的实际路线的长度，称为**路程**。显然

$$\Delta s\geqslant|\Delta\boldsymbol{r}| \tag{1-10}$$

位矢、位移和路程的国际单位名称都是米，符号为 m。

1.2.4　速度　速率

用质点的位移与发生位移所用时间之比值表示位置变动的快慢，

称之为平均速度，用 $\bar{\boldsymbol{v}}$ 表示。

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} \tag{1-11}$$

平均速度是矢量，其方向与位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的方向相同，其大小为 $|\bar{\boldsymbol{v}}| = \dfrac{|\Delta \boldsymbol{r}|}{\Delta t}$。

平均速度只是粗略地反映了一个时间段的质点位置变动的平均快慢和方向，不能反映质点瞬时的运动状态。若想反映瞬时的运动状态，就必须使所取的时间段 Δt 趋近于零，此时位移也随之趋近于零。在此过程中，位移 $\Delta \boldsymbol{r} = \overrightarrow{PQ}$ 的方向逐渐趋近于 P 点的切线方向，因而平均速度的方向无限趋近轨道的切线，如图 1-3。这时的平均速度反映了质点的瞬时运动状态，定义为**瞬时速度**，简称为速度，用 $\boldsymbol{v}$ 表示。

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \tag{1-12}$$

瞬时速度的方向沿轨道的切线并指向前进的一方。

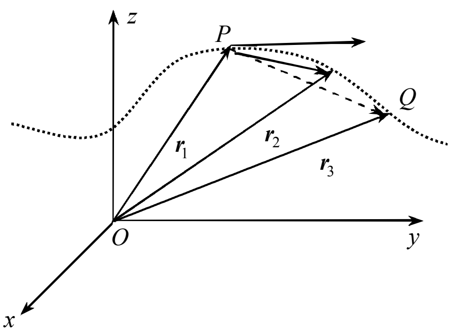


图 1-3

由（1-1）式可知

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1-13}$$

式中 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$， $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$， $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 分别表示速度 $\boldsymbol{v}$ 在三个坐标轴上的分量。

速度的大小

$$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1-14}$$

平均速率反映质点在一段时间里的平均运动快慢，定义为运动的

路程与所用时间的比值。

$$\overline{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1-15}$$

为了反映质点瞬时的运动快慢，引入**瞬时速率**的概念，定义瞬时速率

$$v=\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1-16}$$

瞬时速率简称速率。由于 $\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$，所以 $v=|\boldsymbol{v}|$，即**速率等于速度的大小**。

平均速度、瞬时速度、平均速率和瞬时速率的单位都是米•秒$^{-1}$（$\mathrm{m\cdot s^{-1}}$）。

1.2.5　加速度

速度往往随时间 t 发生变化，因而可表示成时间的矢量函数，即

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$$

不管速度的大小发生变化还是方向发生变化，都会引起速度变化，这样的运动都是**变速运动**。由于曲线运动的速度方向发生变化，所以**曲线运动肯定是变速运动**。为了描述变速运动速度的变化趋势，引入加速度这一物理量。

平均加速度

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} \tag{1-17}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)$，$\Delta t=t_1-t$。平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$ 表示质点在 t 至 t_1 时间段的速度变化的平均快慢。

为了表示速度的瞬间变化趋势，引入瞬时加速度的概念。我们可令 Δt 逐渐缩短而趋近于零，取平均加速度 $\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ 极限值，这一极限值称为质点在时刻 t 的**瞬时加速度**，简称加速度，即

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \tag{1-18}$$

由于 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，所以

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} \tag{1-19}$$

由（1-1）式和（1-13）式可知

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k} \tag{1-20}$$

$a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$，$a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$ 分别是加速度 $\boldsymbol{a}$ 在三个坐标轴上的分量。

加速度的大小

$$a = |\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \tag{1-21}$$

加速度的单位是米 · 秒$^{-2}$（$\mathrm{m \cdot s^{-2}}$）。

例 1.2　一质点在一平面直角坐标系中的运动方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (2t^2 + 4t + 2)\boldsymbol{i} + (4t + 5)\boldsymbol{j} \quad \text{(SI)}$$

求（1）质点的速度、加速度表达式；

（2）$t = 1\mathrm{s}$ 至 $t = 4\mathrm{s}$ 时间段的位移、平均速度和平均加速度。

解　（1）$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (4t + 4)\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$　（SI）

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 4\boldsymbol{i} \quad \text{(SI)}$$

（2）
$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(4) - \boldsymbol{r}(1) = (2\times 4^2 + 4\times 4 + 2)\boldsymbol{i} + (4\times 4 + 5)\boldsymbol{j} \\ &\quad -(2\times 1^2 + 4\times 1 + 2)\boldsymbol{i} - (4\times 1 + 5)\boldsymbol{j} \\ &= 42\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}\end{aligned}$$

$$\bar{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{42\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}}{4 - 1} = 14\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} \quad \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\Delta\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(4) - \boldsymbol{v}(1) = (4\times 4 + 4)\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - (4\times 1 + 4)\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} = 12\boldsymbol{i}\ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$\bar{\boldsymbol{a}} = \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{12}{4 - 1}\boldsymbol{i} = 4\boldsymbol{i}\ \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

1.3　圆周运动及其描述

质点沿圆周轨道的运动称为**圆周运动**。圆周运动是一种常见的平面曲线运动，通过研究圆周运动，可以更好地研究一般的曲线运动，同时圆周运动也是研究物体转动的基础。

1.3.1　切向加速度和法向加速度

如图 1-4 所示，质点沿着圆心为 O 点，半径为 R 的圆周作逆时针的运动。在轨迹上任意一点可建立这样的坐标，它的一坐标轴在质点所在位置的 P 点沿轨道切线方向，其单位方向矢量用 $\boldsymbol{e}_t$ 表示，另一坐

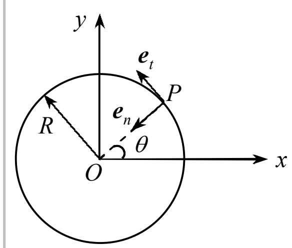


图 1-4

标轴沿该点轨迹的法线并指向曲线的凹侧，单位方向矢量用 $\boldsymbol{e}_n$ 表示，这种坐标系就叫**自然坐标系**。显然，在轨迹的不同位置，自然坐标系的方向矢量是不同的。

$$\boldsymbol{e}_n = -\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{e}_t = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$$

质点在 P 点的位矢为

$$\boldsymbol{r} = R\cos\theta\boldsymbol{i} + R\sin\theta\boldsymbol{j} = -R\boldsymbol{e}_n$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R\cos\theta\,\boldsymbol{i} + R\sin\theta\,\boldsymbol{j}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}(R\theta)}{\mathrm{d}t}\left(-\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t\\ &= v\boldsymbol{e}_t\end{aligned}$$

即
$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t \tag{1-22}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v\boldsymbol{e}_t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}t} &= -\cos\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} - \sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = \frac{R\mathrm{d}\theta}{R\mathrm{d}t}(-\cos\theta\boldsymbol{i} - \sin\theta\boldsymbol{j})\\ &= \frac{\mathrm{d}s}{R\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_n = \frac{v}{R}\boldsymbol{e}_n\end{aligned}$$

所以
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t + \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n \tag{1-23}$$

加速度的大小

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{1-24}$$

式中 $\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t$，叫**切向加速度**，$|\boldsymbol{a}_t| = a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，其值表示速率变化的快慢；$\boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_n$，叫**法向加速度**，$|\boldsymbol{a}_n| = a_n = \frac{v^2}{R}$ 表示速度方向变化的快慢。

例 1.3　已知某质点做圆周运动，运动的弧长与时间的关系为 $s = 3t^2 + 2t$（SI），运动半径 $R = 8\,\mathrm{m}$，求 $t = 1\mathrm{s}$ 时加速度大小。

解　$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6t + 2$，$t = 1\mathrm{s}$ 时，$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}6\,\mathrm{m/s^2}$，$a_n = \frac{v^2}{R} = 8\,\mathrm{m/s^2}$，加速度大小为 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 10\,\mathrm{m/s^2}$

对于一般的曲线运动，在某点附近的一小段弧线可以看作是圆周的一部分，因而圆周运动的公式对曲线运动也适用，只不过将圆的半径改为曲线的曲率半径而已，即

$$\boldsymbol{a}_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_t\,,\quad \boldsymbol{a}_n = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n \tag{1-25}$$

1.3.2　圆周运动的角量描述

由于圆周运动的轨道半径是固定值，因此在极坐标中其坐标变量仅为角度 θ，使得运动方程更为简单。如图 1-4，在极坐标系中，质点的位置矢量与 Ox 轴的夹角 θ 称为质点的**角位置**，随着质点的运动，角位置发生变动，其增量 $\Delta\theta$ 叫**角位移**。角位移有大小和方向，其方向与运动平面垂直，指向则由**右手螺旋法则**确定，即把右手的拇指伸直，其余四指弯曲，使四指弯曲的绕向与质点绕圆心运动的绕向一致，则拇指的指向即为角位移的方向。有限角位移不是矢量，因为不符合平行四边形运算法则，但无限小角位移是矢量。圆周运动的平面为固定平面时，角位移的方向只有两个，可以用正负号表示方向。一般规定逆时针方向为正方向。同理，我们可以用正负号表示角位移、角速度和角加速度的方向。

角位移 $\Delta\theta$ 与时间 Δt 之比值表示平均运动快慢，称之为**平均角速度**，用 $\bar{\omega}$ 表示，即

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \tag{1-26}$$

$\Delta t \to 0$ 时比值的极限值表示圆周运动的瞬时快慢，叫**瞬时角速度**，简称角速度，即

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{1-27}$$

对于变速圆周运动来说，其角速度也随时间发生变化，角速度增量 $\Delta\omega$ 与时间 Δt 之比值表示角速度平均变化快慢，称之为**平均角加速度**，用 $\bar{\alpha}$ 表示，即

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \tag{1-28}$$

$\Delta t \to 0$ 时比值的极限值表示角速度瞬时变化快慢，叫**瞬时角加速度**，简称角加速度，即

$$\alpha = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{1-29}$$

角速度和角加速度的单位分别是 $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ 和 $\mathrm{rad \cdot s^{-2}}$ 。

1.3.3 角量与线量的关系

在圆周运动中，相关线量（速度、加速度）与角量（角速度和角加速度）间存在一定的关系，我们将其关系推导出来。

圆周运动的弧长 $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\theta$ ，速率 $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{R\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$ ，即

$$v = R\omega \tag{1-30}$$

$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\alpha$ ，即

$$a_t = R\alpha \tag{1-31}$$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2$ ，即

$$a_n = R\omega^2 \tag{1-32}$$

例 1.4 一质点作半径为 3m 的圆周运动，运动方程为 $\theta = \theta(t) = t^3 + 2t + 2$ （SI），求 $t = 2\,\mathrm{s}$ 时角速度、角加速度、速率和加速度大小。

解 $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 3t^2 + 2$ $\quad \omega(2) = 3\times 2^2 + 2 = 14\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$

$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 6t$ $\quad \alpha(2) = 6\times 2 = 12\ \mathrm{rad \cdot s^{-2}}$

$$v(2) = R\omega(2) = 3\times 14 = 42\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

$$a_t(2) = R\alpha(2) = 3\times 12 = 36\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a_n(2) = R\left[\omega(2)\right]^2 = 3\times 14^2 = 588\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$a(2) = \sqrt{\left[a_t(2)\right]^2 + \left[a_n(2)\right]^2} = \sqrt{36^2 + 588^2} \approx 589\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

1.4 运动学的应用

1. 已知运动方程，求速度、加速度。此类问题主要运用求导的方法。

例 1.5 一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r} = 4t\boldsymbol{i} + (3t - 5t^2)\boldsymbol{j}$ （SI），求（1）速度、加速度；

（2）轨道方程，初始时刻轨道的曲率半径。

解　（1）$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=4\boldsymbol{i}+(3-10t)\boldsymbol{j}$　（SI），加速度 $\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-10\boldsymbol{j}$（SI）

（2）$x=4t$，　$y=3t-5t^2$，轨道方程为 $16y=12x-5x^2$，轨道为抛物线。

$v_x=4$，　$v_y=3-10t$，初始时刻速度方向与 x 轴的夹角 θ，$\tan\theta=\dfrac{v_y(0)}{v_x(0)}=\dfrac{3}{4}$；

由于速度方向沿轨道的切线，所以此点的轨道斜率为 $\dfrac{3}{4}$。

初始时刻速率 $v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$；

初始时刻 $a_n=a\cos\theta=10\times\dfrac{4}{5}=8\ \ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，根据 $a_n=\dfrac{v^2}{\rho}$，$\rho=\dfrac{v^2}{a_n}=\dfrac{5^2}{8}=3.125\ \mathrm{m}$

例 1.6　如图 1-5 所示，一根硬杆 AB 长为 l，杆的两端始终在 Ox、Oy 的正轴上。已知 A 端的运动方程为 $\boldsymbol{r}_A=(l_0-2t)\boldsymbol{j}$，求 B 端的运动方程、速度、加速度。

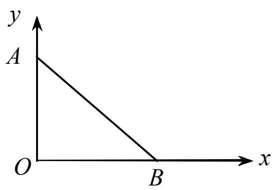


图 1-5

解　A 端运动方程分量式 $x_A=0$，　$y_A=l_0-2t$；

B 端运动方程分量式 $y_B=0$，　$x_B^2+y_A^2=l^2$，

$$x_B=\sqrt{l^2-y_A^2}=\sqrt{l^2-(l_0-2t)^2},$$

B 端运动方程为 $\boldsymbol{r}_B=\sqrt{l^2-(l_0-2t)^2}\ \boldsymbol{i}$

B 端的速度 $\boldsymbol{v}_B=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_B}{\mathrm{d}t}=\dfrac{2(l_0-2t)}{\sqrt{l^2-(l_0-2t)^2}}\boldsymbol{i}$

B 端的加速度

$$\boldsymbol{a}_B=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_B}{\mathrm{d}t}=-\frac{4[l^2+(l_0-2t)^2-(l_0-2t)^2]}{\left[l^2-(l_0-2t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{i}=-\frac{4l^2}{\left[l^2-(l_0-2t)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\boldsymbol{i}$$

2. 已知加速度和初始条件，求解速度和运动方程。此类问题主要运用积分的方法。

例 1.7　质点沿直线运动，加速度 $a=-kv$，k 为正的常数，初始位置为 $x=0$，初始速度为 v_0，求速度表达式和运动方程。

解　$a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}v}{v}=-k\mathrm{d}t$，$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t -k\mathrm{d}t$，$v=v_0\mathrm{e}^{-kt}$；

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\text{，所以 }\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t\text{，}\int_0^x \mathrm{d}x=\int_0^t v_0\mathrm{e}^{-kt}\mathrm{d}t\text{，}\quad x=\frac{v_0}{k}(1-\mathrm{e}^{-kt})$$

1.5　相对运动

由运动的相对性可知，在不同的参考系中描述同一质点运动的物理量不同，但它们之间有一定的数量关系。

人们在长期观察自然的基础上形成了经典时空观，也就是时空的绝对性。伽利略变换就是建立在经典时空观基础之上的。

设有两个不同参考系，对应的坐标系分别为 $K(Oxyz)$ 和 $K'(O'x'y'z')$，各个对应的坐标轴互相平行，将 K 坐标系叫做**静止坐标系**，简称静系，K' 叫做**运动坐标系**，简称动系，如图 1-6 所示。所描述的质点为 P，其在静系中测量的运动量叫**绝对量**（绝对位矢 $\boldsymbol{r}$、绝对速度 $\boldsymbol{v}$ 和绝对加速度 $\boldsymbol{a}$），P 在动系中测量的运动量叫**相对量**（相对位矢 $\boldsymbol{r}'$、相对速度 $\boldsymbol{v}'$ 和相对加速度 $\boldsymbol{a}'$），动系 K'的坐标原点 O' 在静系 K 中的运动量叫**牵连量**（牵连位矢 $\boldsymbol{r}_0$、牵连速度 $\boldsymbol{v}_0$ 和牵连加速度 $\boldsymbol{a}_0$）。

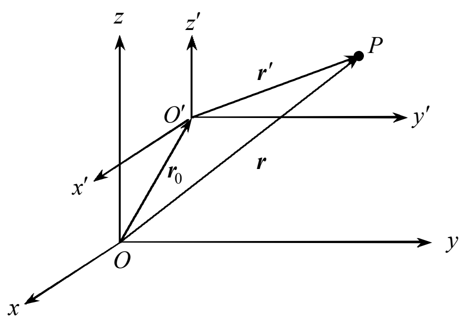


图 1-6

经典时空观认为，在不同参考系测量同一个物理事件的时间间隔是相同的，这叫**时间的绝对性**，因而 $\Delta t=\Delta t'$（或 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}t'$）；同一瞬间在不同参考系测量同一物体的长度是相同的，这叫**空间的绝对性**。所以在 K 系中测量 $\overrightarrow{O'P}$ 与在 K'系中测量 $\overrightarrow{O'P}$ 是相同的。由此我们得出如下关系：

$$\begin{cases}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}' \\ \Delta t=\Delta t'\end{cases} \tag{1-33}$$

此变换式叫**伽利略变换**。由此可推导出速度变换和加速度变换：

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}')}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}'\text{，即}$$

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}' \tag{1-34}$$

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}')}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{a}_0+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t'}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}'\text{，即}$$

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}' \tag{1-35}$$

所以绝对量=牵连量+相对量。

例 1.8　雨滴以 15m/s 的速度竖直下落，汽车以 20m/s 的速度水平行驶。问雨滴相对于汽车的速度多大？

解　如图 1-7，选地面为静系，汽车为动系，雨滴为观测对象。

$\boldsymbol{v}=-15\boldsymbol{j}$ m/s，$\boldsymbol{v}_0=20\boldsymbol{i}$ m/s，雨滴相对汽车的速度 $\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0=(-15\boldsymbol{j}-20\boldsymbol{i})$ m/s，$|\boldsymbol{v}'|=\sqrt{(-15)^2+(-20)^2}=25$ m/s。

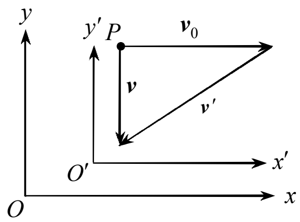


图 1-7

当速度接近光速时，经典时空观不再符合物理事实，必须使用相对论时空观，伽利略变换不再适用，取而代之的是洛伦兹变换。

习题 1

1-1　两质点的运动学方程分别为：

（1）$\boldsymbol{r}=(4t+5t^2)\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}$

（2）$\boldsymbol{r}=(2+3t)\boldsymbol{i}-(2t-3t^2)\boldsymbol{j}$

求两运动的轨迹。

1-2　一质点在 XY 平面内运动，运动方程为 $x=4\cos\pi t$，$y=2\sin\pi t$（SI）。

（1）写出质点的位置矢量表达式和轨道方程；

（2）求出质点即时速度和加速度的表达式；

（3）求出 $t=0\,\mathrm{s}$ 到 $t=1\,\mathrm{s}$ 时间内质点的平均速度和平均加速度。

1-3　质点沿 x 轴运动，坐标与时间的关系为 $x=4t-2t^3$，式中 x、t 分别以 m、s 为单位。试计算：

（1）在最初 2s 内的平均速度，2s 末的瞬时速度；

（2）1s 末到 3s 末的位移、平均速度；

（3）1s 末到 3s 末的平均加速度；此平均加速度是否可用

$\overline{a}=\frac{a_1+a_2}{2}$计算？

（4）3s 末的瞬时速度。

1-4　一个质点在 x 轴上作直线运动，运动方程为 $x=3t^3+4t^2+8$（SI），求：

（1）任意时刻的速度和加速度；

（2）在 $t=2\,\mathrm{s}$ 和 $t=3\,\mathrm{s}$ 时刻，物体的位置、速度和加速度；

（3）在 $t=2\,\mathrm{s}$ 到 $t=3\,\mathrm{s}$ 时间内，物体的平均速度和平均加速度。

1-5　一物体做直线运动，它的运动学方程为 $x=at+bt^2+ct^3$，其中 a，b，c 均为常量，求：

（1）$t=1\sim2\,\mathrm{s}$ 期间的位移、平均速度和平均加速度；

（2）$t=2\,\mathrm{s}$ 时的速度和加速度。

1-6　一质点的运动方程为 $x=4t^2$，$y=2t+3$（SI），试求：

（1）运动轨迹；

（2）第一秒内的位移；

（3）$t=0\,\mathrm{s}$ 和 $t=1\mathrm{s}$ 两时刻质点的速度和加速度。

1-7　一质点的运动方程为 $x=3t+5$，$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$，试求

（1）以 t 为变量，写出位矢的表达式；

（2）描绘它的轨迹；

（3）式中 t 以 s 为单位，x、y 以 m 为单位，求：质点在 $t=4\,\mathrm{s}$ 时速度的大小和方向。

1-8　一质点做半径 $R=3\,\mathrm{m}$ 的圆周运动，其角位置 $\theta=4t^2-t\,\mathrm{rad}$，求：

（1）质点的角速度和角加速度随时间 t 的函数关系；

（2）$t=0.2\,\mathrm{s}$ 时质点的速度、加速度大小。

1-9　一飞轮以转速 $n=1500\,\mathrm{rev/min}$，受到制动而均匀减速，经 50s 静止，求：

（1）角加速度的大小；

（2）从制动到静止飞轮转过的转数；

（3）飞轮半径为 1m，制动 25s 时飞轮边缘一点的速度和加速度多大？

1-10　一质点沿半径为 0.10m 的圆周运动，其角位置 θ（以弧度表示）可以用下式表示：$\theta=2+4t^3$，式中 t 以秒计。问：

（1）质点在 $t=2\,\mathrm{s}$ 时及 $t=4\,\mathrm{s}$ 时的法向加速度和切向加速度；

（2）当切向加速度的大小为总加速度的一半时，θ 的值为多少？在哪一时刻，切向加速度和法向加速度的值相等？

1-11　飞轮的角速度在 5s 内由 $900\,\mathrm{rev/min}$ 均匀减到 $800\,\mathrm{rev/min}$。求：

（1）角速度；

（2）在此 5s 内的总转数；

（3）再经过几秒飞轮将停止转动？

1-12　一球以 $30\,\mathrm{m/s}$ 的速度水平抛出，试求 $t = 5\,\mathrm{s}$ 时加速度的切向分量和法向分量。

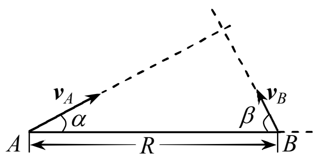
1-13　一个人扔石头的最大出手速率为 $v = 25\,\mathrm{m/s}$，他能击中一个与他的手水平距离为 $L = 50\,\mathrm{m}$ 而高 $h = 13\,\mathrm{m}$ 的目标吗？在这个距离上他能击中的最大高度是多少？

1-14　某物体由静止开始沿 x 轴做直线运动，初始位置为原点，其加速度 $a = g - kv$，式中 g、k 为正的常数。试计算速度随时间的函数关系和物体的运动方程。

1-15　一质点沿直线运动，其速度为 $v = At - Bx$，其中 A，B 均为常数，当 $t = 0$ 时，$x = 0$，试求位置坐标与 t 的函数关系式及 $t = 0$ 时的加速度 a_0。

1-16　一艘轮船以 $45\,\mathrm{km/h}$ 沿直线向东行驶，一快艇在其前方以 $60\,\mathrm{km/h}$ 的速度沿直线向南行驶。问在轮船上看快艇的速度多大？

1-17　如题 1-17 图所示，两船 A 和 B 相距 R，分别以速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和 $\boldsymbol{v}_B$ 匀速直线行驶。在什么情况下它们会相撞？若 $v_A = 2v_B$，$\alpha = 45°$，$\beta = 30°$，求两船相靠最近的距离。



题 1-17 图

1-18　一列火车以 $5\,\mathrm{m/s}$ 的速度沿 x 轴正方向行驶，某旅客在车厢中观察一个站在站台上的小孩竖直向上抛出的一球。相对于站台上的坐标系来说，球的运动方程为

$$x = 0 \qquad y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad （v_0，g \text{ 是常量}）$$

（1）如果旅客用随车一起运动的坐标系来描写小球的运动，已知 x' 轴与 x 轴同方向，y' 轴与 y 轴相平行，方向向上，且在 $t = 0$ 时，坐标原点 O 与 O' 相重合，则 x' 和 y' 的表达式将是怎样的？

（2）在 $O'x'y'$ 坐标系中，小球的运动轨迹又是怎样的？

（3）在车上的旅客与站在车站上的观察者看来，小球的加速度各为多少？方向是怎样的？

1-19　半径为 R 的轮子在某一水平线上向前无滑动地滚动，当轮缘上的 B 点与水平线接触时开始计时。

（1）证明 B 点的运动方程为 $x = R(\omega t - \sin\omega t)$，$y = R(1 - \cos\omega t)$；

（2）求 B 点速度和加速度的分量表达式。